

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
64. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2014/2015)

Kategorie A

1. Je dáno přirozené číslo n . Čtverec o straně délky n je rozdělen na n^2 jednotkových čtverečků. Za vzdálenost dvou čtverečků považujeme vzdálenost jejich středů. Určete počet dvojic čtverečků, jejichž vzdálenost je 5. *(Jaroslav Zhouf)*
2. Je dán trojúhelník ABC , v němž je BC nejkratší stranou. Její střed označme M . Na stranách AB a AC určíme postupně body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Průsečík přímk CX a BY označme Z . Ukažte, že přímka ZM prochází středem kružnice vepsané straně BC daného trojúhelníku. *(Michal Rolínek)*
3. Najděte všechna celá čísla $k \geq 2$, pro která existuje k -prvková množina M celých kladných čísel taková, že součin všech čísel z M je dělitelný součtem libovolných dvou (různých) čísel z M . *(Jaromír Šimša)*
4. Předpokládejme, že pro reálná čísla x, y, z platí

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že alespoň jedno z nich je různé od nuly.

- a) Dokažte rovnost $x + y + z = 4$.
 - b) Najděte nejmenší interval $\langle a, b \rangle$, v němž leží všechna tři čísla z libovolné trojice (x, y, z) vyhovující předpokladům úlohy. *(Jaromír Šimša)*
5. V daném trojúhelníku ABC označme D bod dotyku kružnice vepsané se stranou BC . Kružnice vepsaná trojúhelníku ABD se dotýká stran AB a BD v bodech K a L . Kružnice vepsaná trojúhelníku ADC se dotýká stran DC a AC v bodech M a N . Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici. *(Josef Tkadlec)*
 6. Nechť a, b jsou daná, navzájem nesoudělná přirozená čísla. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel je sestavena tak, že pro každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokažte, že v libovolné takové posloupnosti každý člen x_n s indexem $n > 1$ dělí nekonečně mnoho jejích dalších členů. Platí toto tvrzení i pro $n = 1$? *(Jaromír Šimša)*

Kategorie B

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} |x - 5| + |y - 9| &= 6, \\ |x^2 - 9| + |y^2 - 5| &= 52. \end{aligned}$$

(Pavel Calábek)

2. Drak má n hlav, po jedné na každém z n krků uspořádaných do kruhu. Rytíř dokáže jedním úderem tít po k sousedních krcích a hlavy na nich setnout. Jestliže drakovi po úderu zbyde aspoň jedna hlava, může si nechat některou z chybějících hlav dorůst. Dokažte, že když pro daná čísla n a k může rytíř draka zbavit všech hlav bez ohledu na to, jak mu dorůstají, svede to udělat nejvýše třemi údery. (Ján Mazák)

3. V trojúhelníku ABC označme U střed strany AB a V střed strany AC . V polorovině opačné k polorovině BCA uvažujme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímk UD a VE . Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu. (Michal Rolínek)

4. Nechť m je přirozené číslo, které má 7 kladných dělitelů, a n je přirozené číslo, které má 9 kladných dělitelů. Kolik dělitelů může mít součin $m \cdot n$? (Eva Patáková)

5. Nechť S je střed přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC , který není rovnoramenný. Označme D patu výšky z vrcholu C a R průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB . Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku, platí-li $|SR| = 2|DR|$. (Jaroslav Švrček)

6. Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určete, kdy nastane rovnost.

(Jaroslav Švrček)

Kategorie C

1. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, která vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+4)^2} &= 4 - y, \\ \sqrt{(y-4)^2} &= x + 8.\end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

2. Petr má zvláštní hodinky se třemi ručičkami – první z nich oběhne kruhový ciferník za minutu, druhá za 3 minuty a třetí za 15 minut. Na začátku jsou všechny ručičky ve stejné poloze. Určete, za jak dlouho budou ručičky rozdělovat ciferník na tři shodné části. Najděte všechna řešení.

(Tomáš Jurík)

3. Simona a Lenka hrají hru. Pro dané celé číslo k takové, že $0 \leq k \leq 64$, vybere Simona k políček šachovnice 8×8 a každé z nich označí křížkem. Lenka pak šachovnici nějakým způsobem vyplní dvaatřiceti dominovými kostkami. Je-li počet kostek pokrývajících dva křížky lichý, vyhrává Lenka, jinak vyhrává Simona. V závislosti na k určete, která z dívek má vyhrávající strategii.

(Michal Rolínek)

4. Označme E střed základny AB lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Úhlopříčka AC protíná úsečky ED , BD po řadě v bodech F , G . Určete postupný poměr

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

(Jaroslav Zhouf)

5. Rozdíl dvou přirozených čísel je 2010 a jejich největší společný dělitel je 2014krát menší než jejich nejmenší společný násobek. Určete všechny takové dvojice čísel.

(Jaromír Šimša)

6. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že v zápise iracionálního čísla \sqrt{n} následují bezprostředně za desetinnou čárkou dvě devítky.

(Josef Tkadlec)